## 2.2 Théorème de point fixe de Kakutani et sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (103, 106, 161, 181, 191, 203) [1]

Quand on a un sous-groupe *fini* $G$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, on sait trouver un produit scalaire invariant $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ pour $G$, défini ainsi :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle g(x), g(y) \rangle.$$

Comme souvent, quand on a un groupe *compact*, on essaie d'y généraliser les propriétés ou les structures qu'on connaît sur les groupes finis. Ainsi, on aimerait trouver un produit scalaire qui soit invariant pour ce groupe compact. En terme de groupe et de géométrie, cela veut dire qu'il existe un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ tel que :

$$G \subset \mathrm{O}\left(\langle \cdot, \cdot \rangle_G\right).$$

Avec de la connaissance en théorie de la mesure et en topologie faible, on a l'existence d'une mesure finie sur $G$, borélienne et invariante par translation à gauche par les éléments de $G$. Une telle mesure, que l'on peut noter $\mu$, est appelée *mesure de Haar*, et, en généralisant l'idée qu'une somme de Riemann converge vers une intégrale, on obtient un produit scalaire invariant de la forme :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle_G = \frac{1}{\mu(G)} \int_G \langle g(x), g(y) \rangle \mathrm{d}\mu(g).$$

Mais, en posant $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ la matrice du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, cela revient à dire :

$$\forall M \in G, \quad M^T B M = B,$$

qui est une équation de point fixe, dont on peut dire qu'il a une solution sans théorie de la mesure. Ainsi, on a deux interprétations du fait de posséder un produit scalaire invariant : une interprétation "groupe orthogonal/stabilisateur d'une forme quadratique définie positive" et une interprétation "point fixe". On va relier ces deux points de vue dans ce développement pour caractériser les sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Pour l'interprétation "groupe orthogonal", on a la caractérisation suivante :

**Proposition 2.5.** Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe. Alors $G$ possède un produit scalaire invariant si et seulement si $G$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

*Démonstration.* $\Rightarrow$ : Supposons que $G$ possède un produit scalaire invariant. Alors, comme on a vu, il existe $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall M \in G, \quad M^T B M = B.$$

Ainsi, $G \subset \mathrm{Stab}_B$ où on a considéré l'action à droite de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ par congruence. Or, étant donné que $B \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, il existe $R \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $B = R^2$. Ainsi, en particulier, on a :

$$B = R^T I_n R$$

et donc $B$ est dans l'orbite de $I_n$ pour l'action par congruence. Ainsi, $\mathrm{Stab}_B$ et $\mathrm{Stab}_{I_n} = \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ sont conjugués. Plus précisément, on a :

$$\mathrm{Stab}_B = R^{-1} \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) R.$$

Ainsi, on a que $RGR^{-1}$ est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ : $G$ est bien conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
$\Leftarrow$ : Réciproquement, si $G = P^{-1} H P$ avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $H$ un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors, en écrivant $P = OR$ la décomposition polaire de $P$, on a :

$$G = R^{-1} H' R$$

avec $H' = O^T H O$ qui est un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $R \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. En posant $B = R^2$, on a alors :

$$\forall M \in G, \quad M^T B M = \left(R^{-1} O' R\right)^T R^2 \left(R^{-1} O' R\right) = R O'^T R^{-1} R^2 R^{-1} O' R = R O'^T O' R = R^2 = B$$

où $O'$ est un élément de $H' \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, $G$ possède un produit scalaire invariant. $\square$

Pour le point de vue "point fixe", on utilise le théorème suivant pour prouver qu'il admet une solution dans le cadre d'un groupe compact :

**Théorème 2.6** (Point fixe de Kakutani)**.** Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $G$ un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(E)$ et $K \subset E$ une partie non-vide convexe et compacte de $E$ stable par $G$, c'est-à-dire :

$$\forall g \in G, \quad g(K) \subset K.$$

Alors, il existe un point $z \in K$ qui soit point fixe sous $G$ :

$$\forall g \in G, \quad g(z) = z.$$

Cela permettra de montrer le résultat suivant :

**Corollaire 2.7** (Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}(E)$)**.** Tout sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

*Démonstration du théorème de point fixe de Kakutani.* Le but est de construire une nouvelle norme sur $E$ adaptée à $G$ et de minimiser cette norme sur $K$ pour obtenir un point fixe. On définit l'application :

$$\begin{array}{rcccl} N & : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \longmapsto & \max\limits_{g \in G} \|g(x)\| \end{array}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne assoicée au produit scalaire sur $E$. On observe alors que :

$$\forall x \in E,\ \forall g \in G, \quad N(g(x)) = \max_{h \in G} \|hg(x)\| = \max_{h \in G} \|h(x)\| = N(x).$$

Il faut donc trouver une condition sur $N(x)$ pour que cette égalité de norme se traduise par une égalité de vecteurs. On verra donc que le point fixe est l'unique élément de $K$ de norme $N$ minimale. Mais revenons à nos moutons ! $N$ est-elle bien une norme ? Est-elle même bien définie ? Fixons $x \in E$. L'application :

$$\begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ g & \longmapsto & \|g(x)\| \end{array}$$

est continue sur le compact $G$. Donc elle admet un maximum. $N$ est donc bien définie. Maintenant, montrons qu'il s'agit d'une norme sur $E$ :

— Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$. On a :

$$N(\lambda x) = \max_{g \in G} \|g(\lambda x)\| = \max_{g \in G} |\lambda| \|g(x)\| = |\lambda| \max_{g \in G} \|g(x)\| = |\lambda| N(x).$$

Rappel : la troisième égalité se justifie par le fait que, puisque $|\lambda|$ est positif, l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |\lambda| x \end{array}$$

est croissante.

— Si $x \in E$ est tel que $N(x) = 0$, alors :
$$\forall g \in G, \quad \|g(x)\| = 0.$$
Ainsi, pour tout $g \in G$, $g(x) = 0$. Comme les éléments de $G$ sont dans $\mathrm{GL}(E)$, on a $x = 0$.

— Si $x, y \in E$, alors, en prenant $g_0 \in G$ tel que :
$$N(x+y) = \|g_0(x+y)\|,$$
on a :
$$N(x+y) = \|g_0(x+y)\| \leqslant \|g_0(x)\| + \|g_0(y)\| \leqslant N(x) + N(y).$$
La première inégalité vient du fait que $g_0$ est linéaire et que la norme euclidienne vérifie l'inégalité triangulaire. Nous aurons besoin de caractériser le cas d'égalité dans cette inégalité triangulaire, alors faisons-le. Il y a égalité entre $N(x+y)$ et $N(x) + N(y)$ si et seulement si les inégalités du dessus deviennent des égalités. On a alors :
$$\|g_0(x) + g_0(y)\| = \|g_0(x)\| + \|g_0(y)\|.$$
Or, cette égalité est vraie si et seulement si $g_0(x)$ et $g_0(y)$ sont positivement liés, ce qui est vrai si et seulement si $x$ et $y$ sont positivement liés (car $g_0$ est un isomorphisme de $E$). Réciproquement, si on a :
$$\exists \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad y = \alpha x,$$
alors on a :
$$N(x+y) = N\left((1+\alpha)x\right) = (1+\alpha)N(x) = N(x) + \alpha N(x) = N(x) + N(y).$$

On a donc que $N$ est une norme sur $E$. Ainsi, $N$ est $1-$Lipschitzienne pour la norme $N$, donc continue sur $(E, N)$. Les normes sur $E$ étant équivalentes (dimension finie), $N$ est continue sur $E$ pour la norme euclidienne. Par compacité de $K$, la quantité :
$$\min_{x \in K} N(x)$$
est bien définie. Notons-la $m$, et considérons $z \in K$ tel que $N(z) = m$. Montrons que $z$ est l'unique élément de $K$ de norme $N$ minimale.
Soit $y \in K$ tel que $N(y) = m$. $K$ étant convexe, on a :
$$\frac{y+z}{2} \in K.$$
Calculons la norme $N$ de ce vecteur :
$$m \leqslant N\left(\frac{y+z}{2}\right) = \frac{1}{2}N(y+z) \leqslant \frac{1}{2}\left(N(y) + N(z)\right) \leqslant \frac{1}{2}(m+m) = m.$$
On a donc :
$$N(y+z) = 2m = N(y) + N(z).$$
Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire pour $y$ et $z$. Ainsi, $y$ et $z$ sont positivement liés. Étant donné qu'ils sont de même norme $N$, on a que $y = z$. Ainsi, $z$ est l'unique vecteur de $K$ de norme minimale. Or, rappelons que :
$$\forall g \in G, \quad N(g(z)) = N(z) = m.$$
Ainsi, on a :
$$\forall g \in G, \quad g(z) = z.$$
□

*Démonstration du corollaire.* Soit $H$ un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On considère, comme dit en début de développement, l'action de $H$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (pas $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ pour pouvoir se placer dans un espace vectoriel pour appliquer le point fixe de Kakutani) par congruence :

$$\begin{array}{rcccl} \rho & : & H^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathrm{GL}\left(\mathscr{S}_n\left(\mathbb{R}\right)\right) \\ & & M & \longmapsto & \left| \, S \mapsto M^T S M. \right. \end{array}$$

Ici, $H^{\mathrm{op}}$ désigne le *groupe opposé* de $H$, c'est-à-dire le groupe $H$ muni de la loi $\cdot^{\mathrm{op}}$ suivante :

$$\forall M, N \in H, \quad M \cdot^{\mathrm{op}} N = NM.$$

Cela permet de dire que $\rho$ est un morphisme de groupe. Ce morphisme est continu. En effet, en munissant $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ de la norme euclidienne issue du produit scalaire :

$$\begin{array}{rcccl} \langle \cdot, \cdot \rangle & : & \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & (M, N) & \longmapsto & \mathrm{Tr}\left(M^T N\right), \end{array}$$

on a :

$$\begin{array}{rcl} \forall M, N \in H, \ \forall S \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \quad \|\rho(M+N)(S) - \rho(M)(S)\| & = & \left\| N^T S M + M^T S N + N^T S N \right\| \\ & \leqslant & \left(2\|N\|\|M\| + \|N\|^2\right) \|S\| \end{array}$$

car la norme euclidienne sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est sous-multiplicative et invariante par transposition. Ainsi, en norme d'opérateur, on obtient :

$$\forall M, N \in H, \quad |\!|\!|\rho(M+N) - \rho(M)|\!|\!| \leqslant 2\|N\|\|M\| + \|N\|^2 \xrightarrow[N \to 0]{} 0.$$

De la continuité de $\rho$ découle que $G := \rho(H)$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}\left(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\right)$. On veut alors appliquer le théorème de point fixe de Kakutani. Mais quelle partie convexe compacte de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ prendre ? Cette partie doit être, en outre, stable par $G$. Ainsi, considérer l'ensemble :

$$\left\{ M^T M \ \mid M \in H \right\} \subset \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

paraît acceptable car :

$$\forall N \in H, \quad \rho(N)\left(M^T M\right) = \underbrace{(MN)}_{\in H}{}^T (MN).$$

Cependant, cet ensemble n'est pas convexe. Il est tout de même compact car l'application :

$$\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^T M \end{array}$$

est continue et $H$ est compact. Posons alors :

$$K = \mathrm{Conv}\left\{ M^T M \ \mid M \in H \right\}$$

Cet ensemble est inclus dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, et même dans $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ car $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe. De plus, $K$ est convexe par définition et compact. Pourquoi ? C'est une conséquence du théorème de Carathéodory, qu'il est important de connaître :

**Théorème 2.8** (Carathéodory)**.** Si $\mathscr{E}$ est un espace affine de dimension $n$, et $A \subset \mathscr{E}$, alors on a :

$$\operatorname{Conv}(A) = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i a_i \;\middle|\; \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1,\;\; (a_0, \ldots, a_n) \in A^{n+1} \right\}.$$

C'est-à-dire que tout point de l'enveloppe convexe de $A$ peut s'écrire comme combinaison convexe de $n+1$ points de $A$.

De ce théorème se déduit que si $E$ est un espace vectoriel de dimension finie et $K \subset E$ est un sous-ensemble compact, alors $\operatorname{Conv}(K)$ est compact, comme image directe du compact $[0,1]^n \times K^{n+1}$ par l'application :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \times E^{n+1} & \longrightarrow & E \\ ((\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}), (x_0, \ldots, x_n)) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x_i + \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i\right) x_n. \end{array}$$

On a donc $K$ convexe, compacte et stable par $G$. En effet, si $M_1, M_2 \in H$ et $t \in [0,1]$, alors :

$$\forall N \in H, \quad \rho(N)\left(tM_1^T M_1 + (1-t)M_2^T M_2\right) = t(M_1N)^T(M_1N) + (1-t)(M_2N)^T(M_2N) \in K$$

et ce calcul se généralise facilement lorsqu'on prend un système barycentrique à plus de 2 éléments. On peut alors appliquer le théorème de point fixe de Kakutani : il existe $S \in K \subset \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\forall N \in H, \quad \rho(N)(S) = S,$$

c'est-à-dire :

$$\forall N \in H, \quad N^T S N = S$$

et donc $H$ possède un produit scalaire invariant ! Ainsi, par la proposition 2.5, $H$ est conjuguée à un sous-groupe de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, ce qui conclut la preuve ! $\square$

**Remarque 2.2.1** (Comment ça $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe ?)**.** *J'ai bien dit que $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ était convexe. Montrons-le : soient $S_1, S_2 \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $t \in [0,1]$. On a que $tS_1 + (1-t)S_2 \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ car c'est un espace vectoriel et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x^T\left(tS_1 + (1-t)S_2\right)x = t\,\underbrace{x^T S_1 x}_{>0} + (1-t)\,\underbrace{x^T S_2 x}_{>0} > 0.$$

*Donc $tS_1 + (1-t)S_2 \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.*